



کد فرم : FR/FY/11

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

ویرایش : صفر

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : ریاضی امتحان درس : معادلات دیفرانسیل (۷ گروه هماهنگ) نیمسال (اول/دوم) ۱۳۹۳-۹۴ نام مدرس :
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : ۱۳۹۳/۱۰/۱۴ وقت : ۱۳۵ دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل مرتبه اول مقابل را حل کنید : $(x \tan \frac{y}{x} + y)dx - xdy = 0$ ۱۵ نمره

سوال ۲- جواب عمومی معادله اوایلر $x^2 y'' + xy' - y = x^2 e^x$ را بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۳- معادله مرتبه دوم مقابل را به کمک عملگر D حل کنید : $(D^2 - 3D)y = 2e^{2x}$ ۱۵ نمره

سوال ۴- جواب معادله دیفرانسیل $y'' - (1+x^2)y = 0$; $y(0) = 8$, $y'(0) = 6$ را به صورت سری حول $x=0$ بیابید. (حداقل ۵ جمله غیر صفر نوشته شود.) ۱۵ نمره

سوال ۵- دستگاه معادلات مقابل را حل کنید : $\begin{cases} x' = 5x - 6y + 1 \\ y' = 6x - 7y + 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 4 \end{cases}$ ۲۰ نمره

سوال ۶- اگر $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$ معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه $x'' + 2x' + 2x = f(t)$; $x(0) = 3$, $x'(0) = 4$ را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید. ۲۰ نمره

موفق باشید



سوال ۱- اگر معادله را به صورت $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ بنویسیم می بینیم که یک معادله مرتبه اول همگن است. با تغییر متغیر $y = xu$ داریم $u + xu' = \tan u + u$ و در نتیجه $xu' = \tan u$ که یک معادله جدایی پذیر است یعنی داریم $\frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x}$ از طرفین تساوی انتگرال می گیریم $\int \frac{du}{\tan u} = \int \frac{dx}{x}$ و داریم:

$$\ln \sin u = \ln(ax) \rightarrow \sin u = ax \rightarrow u = \frac{y}{x} = \arcsin(ax) \rightarrow y = x \arcsin(ax)$$

سوال ۲- روش اول: ابتدا معادله همگن را حل می کنیم. $x^2 y'' + xy' - y = 0$ معادله مشخصه آن عبارت است از $r(r-1) + r - 1 = 0$ یعنی $r^2 - 1 = 0$ که دو ریشه $r = \pm 1$ دارد پس جواب معادله همگن عبارت است از $y_h = ax + \frac{b}{x}$. برای

استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می دهیم $y_1 = x$ و $y_2 = \frac{1}{x}$ و در نتیجه $w(y_1, y_2) = \frac{-2}{x}$ و چون $h(x) = e^x$

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 h(x)}{w} dx + y_2 \int \frac{y_1 h(x)}{w} dx = -x \int \frac{\frac{1}{x} e^x}{\frac{-2}{x}} dt + \frac{1}{x} \int \frac{x e^x}{\frac{-2}{x}} dt$$

$$= \frac{x}{2} \int e^x dt - \frac{1}{2x} \int x^2 e^x dt = \frac{x}{2} e^x - \frac{1}{2x} (x^2 - 2x + 2) e^x = (1 - \frac{1}{x}) e^x$$

و جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y_g = ax + \frac{b}{x} + (1 - \frac{1}{x}) e^x$$

روش دوم: در معادله اوپلر داده شده تغییر متغیر $x = e^t$ را اعمال می کنیم. یعنی قرار می دهیم:

$$xy' = \frac{dy}{dt}, \quad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$x^2 y'' + xy' - y = x^2 e^x \rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{2t} e^{e^t} \rightarrow y'' - y = e^{2t} e^{e^t}$$

این یک معادله غیر همگن با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه معادله همگن نظیر آن عبارت است از $m^2 - 1 = 0$

که دو ریشه $m_1 = 1$ و $m_2 = -1$ دارد. جواب معادله همگن عبارت است از: $y_h = ae^t + be^{-t}$

برای استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می دهیم. $y_1 = e^t$ و $y_2 = e^{-t}$ و در نتیجه $w(y_1, y_2) = -2$ و چون $h(t) = e^{2t} e^{e^t}$ جواب خصوصی معادله عبارت است از:

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 h(t)}{w} dt + y_2 \int \frac{y_1 h(t)}{w} dt = -e^t \int \frac{e^{-t} e^{2t} e^{e^t}}{-2} dt + e^{-t} \int \frac{e^t e^{2t} e^{e^t}}{-2} dt$$

$$= \frac{e^t}{2} \int e^t e^{e^t} dt - \frac{e^{-t}}{2} \int e^{2t} e^{e^t} dt = \frac{e^t}{2} e^{e^t} - \frac{e^{-t}}{2} (e^{2t} - 2e^t + 2) e^{e^t} = (1 - e^{-t}) e^{e^t}$$

جواب عمومی معادله غیر همگن با ضرایب ثابت برابر است با:

$$y_g = ae^t + be^{-t} + (1 - e^{-t}) e^{e^t}$$

و چون $x = e^t$ جواب معادله اوپلر داده شده عبارت است از:

$$y_g = ax + \frac{b}{x} + (1 - \frac{1}{x}) e^x$$



سوال ۳- ابتدا معادله همگن $(D^2 - 3D)y = 2e^{3x}$ را حل می‌کنیم. معادله مشخصه برابر است با $D^2 - 3D = 0$

که دو ریشه ۳ و ۰ دارد. پس جواب معادله همگن عبارت است از: $y_h = ae^{3x} + b$

جواب خصوصی معادله برابر است با:

$$y_p = \frac{2}{D^2 - 3D} e^{3x} = 2e^{3x} \frac{1}{(D+3)^2 - 3(D+3)} \quad (1)$$

$$= 2e^{3x} \frac{1}{D^2 + 3D} (1) = 2e^{3x} \frac{1}{3D} \frac{1}{1 + D/3} (1) = 2e^{3x} \frac{1}{3D} (1 - \frac{D}{3} + \frac{D^2}{9} + \dots) (1) = 2e^{3x} \frac{1}{3D} (1) = \frac{2}{3} xe^{3x}$$

جواب عمومی معادله عبارت است از: $y_g = ae^{3x} + b + \frac{2}{3} xe^{3x}$

سوال ۴- $x = 0$ یک نقطه عادی معادله است پس معادله جوابی به شکل سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارد.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \text{این جواب را در معادله قرار می‌دهیم:}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$\rightarrow 2a_2 + 6a_2 x - a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n - a_{n-2}] x^n = 0$$

اکنون باید داشته باشیم: $2a_2 - a_0 = 0$, $6a_2 - a_1 = 0$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n - a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, a_3 = \frac{a_1}{6}, a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}, n = 2, 3, 4, \dots \quad \text{یعنی:}$$

$$a_0 = 8, a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 1 \quad \text{چون } y'(0) = 6 = a_1 \text{ و } y(0) = 8 = a_0 \text{ داریم:}$$

$$a_4 = \frac{12}{12} = 1, a_5 = \frac{7}{24}, a_6 = \frac{5}{36} = \frac{1}{6}, \dots$$

جواب معادله عبارت است از: $y = 8 + 6x + 4x^2 + x^3 + x^4 + \frac{7}{24}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \dots$

سوال ۵- روش اول: به کمک عملگر D داریم:

$$\begin{cases} (D-5)x + 6y = 1 \\ -6x + (D+7)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 6 \\ (D-5) \end{matrix} \begin{cases} (D-5)x + 6y = 1 \\ -6x + (D+7)y = 1 \end{cases} \rightarrow (D^2 + 2D + 1)y = 1 \quad \text{با حذف مجهول } x \text{ داریم:}$$

ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم یعنی $(D^2 + 2D + 1)y = 0$ معادله مشخصه عبارت است از $D^2 + 2D + 1 = 0$

که ریشه مضاعف $D = -1$ دارد و جواب معادله همگن عبارت است از: $y_h = (a + bt)e^{-t}$

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^2} (1) = (1 - D + D^2 - \dots)^{-1} (1) = 1 \quad \text{برای یافتن جواب خصوصی از تساوی } (D^2 + 2D + 1)y = 1 \text{ داریم:}$$

جواب عمومی معادله مرتبه دوم برابر است با: $y_g = (a + bt)e^{-t} + 1$

$$x_g = \frac{1}{6}(y'_g + 7y_g - 1) = \frac{1}{6}[(6a + b + 6bt)e^{-t} + 6] \quad \text{با قرار دادن این جواب در معادله دوم دستگاه داریم:}$$

$$x_g = (a + \frac{b}{6} + bt)e^{-t} + 1$$

به کمک شرایط اولیه ضرایب را محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases} x_g = (a + \frac{b}{\epsilon} + bt)e^{-t} + 1 \\ y_g = (a + bt)e^{-t} + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 = a + \frac{b}{\epsilon} + 1 \\ 4 = a + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -6 \\ a = 3 \end{cases}$$

جواب نهایی دستگاه برابر است با :

$$\begin{cases} x_g = (3 - 6t)e^{-t} + 1 \\ y_g = (3 - 6t)e^{-t} + 1 \end{cases}$$

روش دوم : تبدیل لاپلاس :

$$\begin{cases} L\{x'\} = L\{\Delta x\} - L\{\epsilon y\} + L\{1\} \\ L\{y'\} = L\{\epsilon x\} - L\{\gamma y + L\{1\}\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sL\{x\} - 3 = \Delta L\{x\} - \epsilon L\{y\} + \frac{1}{s} \\ sL\{y\} - 4 = \epsilon L\{x\} - \gamma L\{y\} + \frac{1}{s} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \epsilon \left\{ (s - \Delta)L\{x\} + \epsilon L\{y\} = 3 + \frac{1}{s} \right. \\ s - \Delta \left\{ -\epsilon L\{x\} + (s + \gamma)L\{y\} = 4 + \frac{1}{s} \right. \end{cases} \rightarrow (s^2 + 2s + 1)L\{y\} = 4s - 1 + \frac{1}{s} \rightarrow L\{y\} = \frac{4s^2 - s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{3}{s+1} - \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow y(t) = 3e^{-t} - 6te^{-t} + 1 \rightarrow x = \frac{1}{\epsilon}(y' + \gamma y - 1) = \frac{1}{\epsilon}(-9e^{-t} + 6te^{-t} + 21e^{-t} - 42te^{-t} + 7 - 1)$$

$$\rightarrow x(t) = 2e^{-t} - 6te^{-t} + 1$$

سوال ۶- تبدیل لاپلاس تابع f را محاسبه می کنیم :

محاسبه مستقیم :

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} dt = \frac{-1}{s+1} e^{-(s+1)t} \Big|_0^\infty = \frac{-1}{s+1} (e^{-s-1} - 1) = \frac{1}{s+1} (1 - e^{-s-1})$$

به کمک فرمولها :

$$L\{f(t)\} = L\{e^{-t} - u_1(t)e^{-t}\} = L\{e^{-t}\} - L\{u_1(t)e^{-t}\} = \frac{1}{s+1} - e^{-s} L\{e^{-t-1}\} = \frac{1}{s+1} (1 - e^{-s-1})$$

تبدیل لاپلاس طرفین معادله را محاسبه می کنیم.

$$L\{x'' + 2x' + 2x\} = L\{f(t)\}$$

$$s^2 L\{x\} - 3s - 4 + 2sL\{x\} - 6 + 2L\{x\} = \frac{1}{s+1} (1 - e^{-s-1})$$

$$(s^2 + 2s + 2)L\{x\} = 3s + 10 + \frac{1}{s+1} (1 - e^{-s-1}) \rightarrow L\{x\} = \frac{3s + 10}{s^2 + 2s + 2} + \frac{1}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)} (1 - e^{-s-1})$$

$$\rightarrow L\{x\} = \frac{3s + 10}{s^2 + 2s + 2} + \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} \right) (1 - e^{-s-1})$$

$$\rightarrow L\{x\} = \frac{2s + 9}{s^2 + 2s + 2} + \frac{1}{s+1} - e^{-s-1} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} \right)$$

$$\rightarrow L\{x\} = \frac{2(s+1) + 7}{(s+1)^2 + 1} + \frac{1}{s+1} - e^{-s-1} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} \right)$$

$$\rightarrow L\{x\} = L\{e^{-t}(2\cos t + 7\sin t + 1)\} - e^{-s-1} L\{e^{-t}(1 - \cos t)\}$$

$$\rightarrow L\{x\} = L\{e^{-t}(2\cos t + 7\sin t + 1)\} - e^{-1} L\{u_1(t)e^{-t}(1 - \cos(t-1))\}$$

$$\rightarrow L\{x\} = L\{e^{-t}(2\cos t + 7\sin t + 1) - u_1(t)e^{-t}(1 - \cos(t-1))\}$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-t}[2\cos t + 7\sin t + 1 - u_1(t)(1 - \cos(t-1))]$$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}[2\cos t + 7\sin t + 1] & 0 \leq t < 1 \\ e^{-t}[2\cos t + 7\sin t + \cos(t-1)] & 1 \leq t \end{cases}$$

و یا :